SÜREKLİ DAĞILIMLAR

Üstel Dağılım

Üstel dağılım yaşam süresini modellemek için oldukça kullanışlı bir dağılımdır. Eğer X rastgele değişkeni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & , \ x > 0 \\ 0 & , dd \end{cases}$$

şeklinde bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse X rastgele değişkenine Üstel dağılıma sahip rastgele değişken denir. Burada β, üstel dağılımın parametresidir.

X~Üstel(β) ise X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-x/\beta}$$

olup, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla E(X)= β ve V(X)= β dir.

Örnek: Bir işletmenin üretmiş olduğu elektronik cihazların arızasız çalışma sürelerinin (saat cinsinden) üstel dağılıma uyduğu görülmüştür ve ortalama arızasız çalışma süresinin 24 saat olduğu hesaplanmıştır. Buna göre;

a) Rastgele seçilen bir cihazın en az 12 saat arızasız çalışma olasılığını hesaplayınız.
b) Rastgele seçilen bir cihazın en fazla 36 saat arızasız çalışma olasılığını hesaplayınız.
c) Seçilen cihazın 30 saatten fazla çalışma olasılığının %80 olabilmesi için bu cihazların ortalama arızasız çalışma süresi ne olmalıdır?

Çözüm:

X~Üstel(β=24) ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24} e^{-x/24} & , \ x > 0 \\ 0 & , dd \end{cases}$$

şeklindedir.

a) $P(X \geq 12) = \int_{12}^{\infty} \frac{1}{24} e^{-x/24} dx = \frac{1}{24} \int_{12}^{\infty} e^{-x/24} dx = e^{-1/2} = 0{,}6065$

b) $P(X \leq 36) = \int_0^{36} \frac{1}{24} e^{-x/24} dx = \frac{1}{24}(-24)\, e^{-x/24} = 1 - e^{-1{,}5} = 0{,}7769$

c) $P(X > 30) = 0,80$ olduğu soruda verilmiştir.

$$\int_{30}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx = 0,80$$

$$e^{-30/\beta} = 0,80$$

$$-\frac{30}{\beta} = \ln(0,80)$$

$$\beta = 134\ saat$$

Üstel Dağılımın Hafızasızlık Özelliği

Üstel dağılımın önemli bir özelliği hafızasız olmasıdır. Bu demektir ki eğer bir T rastgele değişkeni üstel dağılıma sahip ise onun koşullu olasılığı

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t)\ ,\ \text{bütün s, t} \geq 0 \text{ için}$$

özelliğini sağlar. Örneğin;

$$P(T > 40 | T > 30) = P(T > 30 + 10 | T > 30) = P(T > 10)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek: X rastgele değişkeni belirli bir müzik setinin ömrünü yıl olarak göstersin ve aşağıdaki gibi bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{-x/6} & , \ x > 0 \\ 0 & , dd \end{cases}$$

a) Bu müzik setinin en az 6 yıl dayanması olasılığını bulunuz.
b) Bu müzik setinin 10 yıldan fazla dayandığı bilindiğine göre 16 yıldan fazla dayanması olasılığını bulunuz.
c) Bu müzik setinin ortalama dayanma süresini bulunuz.

Çözüm:

a) $P(X \geq 6) = \int_6^\infty \frac{1}{6} e^{-x/6} dx = \frac{1}{6}(-6)e^{-x/6}\Big|_6^\infty = -e^{-x/6}\Big|_6^\infty = -e^{-\infty/6} + e^{-6/6} = e^{-1}$

$P(X \geq 6) = 0{,}369$

b) Koşullu olasılık formülü kullanılarak çözümü**:**

$$P(X > 16|X > 10) = \frac{P(X > 16 \; ve \; X > 10)}{P(X > 10)} = \frac{P(X > 16)}{P(X > 10)} = \frac{\int_{16}^\infty \frac{1}{6} e^{-x/6} dx}{\int_{10}^\infty \frac{1}{6} e^{-x/6} dx} = \frac{e^{-16/6}}{e^{-10/6}}$$
$$= e^{-1}$$

$P(X > 16|X > 10) = 0{,}367$

Üstel dağılımın hafızasızlık özelliğini kullanarak çözümü:

$P(X > 16|X > 10) = \; P(X > 6)$=$\int_6^\infty \frac{1}{6} e^{-x/6} dx$=$e^{-1} = 0{,}367$

c) E(X)=6 yıl

Gamma Dağılımı

Gamma dağılımından önce Gamma fonksiyonunu tanımlayalım.

Gamma Fonksiyonu:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}.e^{-x/\beta} dx = \Gamma(\alpha)\beta^\alpha$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Gamma fonksiyonu* denir. $\beta = 1$ alındığında Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}.e^{-x} dx$$

şeklinde de ifade edilir. Bu integrale kısmi integrasyon uygulandığında

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

elde edilir. α pozitif tam sayı ise

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots \Gamma(1)$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

dir. Böylece

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

olarak bulunur. Gamma fonksiyonunun özellikleri özetlenirse;

1. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$

2. $\Gamma(1) = 1$

3. $\Gamma(n) = (n - 1)!$

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

5. $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du$

yazılabilir.

Tanım: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , x > 0 \\ 0 & , dd \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanmış ise X rastgele değişkeni $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ parametreli Gamma olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir denir ve X~Gamma (α, β) olarak gösterilir.

- Gamma dağılımında $\alpha = 1$ alınırsa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & , x > 0 \\ 0 & , dd \end{cases}$$

şeklindeki gibi Üstel (β) dağılım elde edilir.

- Gamma dağılımında $\alpha = \frac{r}{2}$ ve $\beta = 2$ alındığında r-serbestlik dereceli Ki-kare dağılımı elde edilir.

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. and Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.